

机密★启封前

湖北汽车工业学院

2023 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目名称：高等代数

(☒A 卷☐B 卷) 科目代码：813

考试时间：3 小时 满分 150 分

注意：本试题共 2 大题，共 2 页；所有答题内容必须写在答题纸上，写在试题或草稿纸上的一律无效；考完后试题和答题纸一同装入试卷袋密封交回。

一、计算题（共 7 小题，共 95 分）

1. (10 分) 如果 $(x-1)^2 \mid Ax^4 + Bx^2 + 1$, 求 A, B .

2. (10 分) 设矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

且三阶方阵 X 满足关系式 $2A^{-1}X = X - E$, 求矩阵 X .

3. (15 分) 计算 n 阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$.

4. (15 分) 解含参数 λ 的方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = -1, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + \lambda x_3 = 0. \end{cases}$$

5. (20 分) 已知二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3,$$

(1) 写出此二次型 f 对应的矩阵;

(2) 试求正交变换 $x = Py$, 将此二次型 f 化为标准形.

6. (15 分) 设线性空间 V 的一组基为

$$\alpha_1 = (-1, 0, -2)', \alpha_2 = (0, 1, 2)', \alpha_3 = (1, 2, 5)',$$

T 是 V 上的线性变换, 若 $T(\alpha_1) = (2, 0, -1)', T(\alpha_2) = (0, 0, 1)', T(\alpha_3) = (0, 1, 2)',$ 求 T 在 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 下的矩阵.

7. (10 分) 设有向量组

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ t \end{pmatrix}.$$

(1) 当 t 为何值时, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关?

(2) 当 t 为何值时, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关? 当向量组线性相关时, 将 α_3 用 α_1, α_2 线性表示.

二、证明题 (共 5 小题, 共 55 分)

1. (10 分) 设方阵 A 满足 $A^2 - 2A - 4E = O$, 证明: $A + E$ 可逆, 并求 $(A + E)^{-1}$.

2. (10 分) 设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 是线性空间 V 的一组基, \mathcal{A} 是 V 上的线性变换, 证明: \mathcal{A} 可逆当且仅当 $\mathcal{A}\varepsilon_1, \mathcal{A}\varepsilon_2, \dots, \mathcal{A}\varepsilon_n$ 线性无关.

3. (10 分) 已知矩阵 A 是 n 阶实可逆矩阵, 证明: $A^T A$ 是正定矩阵.

4. (10 分) 证明: 如果 $V = V_1 \oplus V_2$, $V_1 = V_{11} \oplus V_{12}$, 则有

$$V = V_{11} \oplus V_{12} \oplus V_2.$$

5. (15 分) 设非齐次线性方程组 $Ax = b$ (b 为非零列向量) 有无穷多个解, $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$ 为 $Ax = b$ 对应的齐次方程组 $Ax = O$ 的一组基础解系, η 为 $Ax = b$ 的一个特解, 证明: 向量组 $\eta, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$ 线性无关.