湖北汽车工业学院

2023 年攻读硕士学位研究生入学考试

参考答案及评分标准

科目名称：数学分析　　　（□A 卷　■B 卷）科目代码：601

考试时间：3 小时　　满分 150 分

注意：所有答题内容必须写在答题纸上，写在试题或草稿纸上的一律无效；考完后试题随答题纸交回。

一、1. **【解】** 由于

$$n\cdot\frac{n}{n^2+n\pi}<n(\frac{1}{n^2+\pi}+\frac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\frac{1}{n^2+n\pi})<n\cdot\frac{n}{n^2+\pi},\qquad（2 分）$$

即

$$\frac{n^2}{n^2+n\pi}<n(\frac{1}{n^2+\pi}+\frac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\frac{1}{n^2+n\pi})<\frac{n^2}{n^2+\pi},\qquad（2 分）$$

又有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+n\pi}=1,\ 且\ \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+\pi}=1,\qquad（2 分）$$

由两边夹法则有

$$\lim_{n\to\infty}n(\frac{1}{n^2+\pi}+\frac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\frac{1}{n^2+n\pi})=1.\qquad（2 分）$$

2. **【解】** 令 $A=\lim\limits_{x\to0}(\frac{\tan x}{x})^{1/x^2}$，从而有

$$\ln A=\lim_{x\to0}\frac{\ln[\tan x/x]}{x^2}\qquad（2 分）$$

$$\overset{(\frac{0}{0})}{=}\lim_{x\to0}\frac{\frac{x}{\tan x}\cdot\frac{x\sec^2x-\tan x}{x^2}}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{x\sec^2x-\tan x}{2x^3}\qquad（2 分）$$

$$\overset{(\frac{0}{0})}{=}\lim_{x\to0}\frac{\sec^2x+2x\sec^2x\tan x-\sec^2x}{6x^2}=\lim_{y\to0}\frac{\sec^2x\tan x}{3x}=\frac{1}{3},\qquad（2 分）$$

故

$$A=\lim_{x\to0}(\frac{\tan x}{x})^{1/x^2}=e^{\frac{1}{3}}.\qquad（2 分）$$

3. **【解】** 因为 $x\to+\infty$，所以不妨设 $x>0$. 由积分中值定理，存在 $\xi\in(0,x]$，

使得

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^x \arctan(t^2)\,dt=\lim_{x\to+\infty}x\arctan(\xi^2)=+\infty\,. \qquad （4 分）$$

故

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x \arctan(t^2)\,dt}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\arctan(x^2)}{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}=\frac{\pi}{2}\,. \qquad （4 分）$$

二、1. **【解】** 令 $\sqrt{x+1}=t$， 则 $x=t^2-1$， $\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$． 故 （2 分）

$$\int\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}dx=2\int\frac{(t-1)t}{t+1}\mathrm{d}t=2\int\frac{(t+1)t-2t}{t+1}\mathrm{d}t=2\int(t-\frac{2t}{t+1})\mathrm{d}t \qquad （2 分）$$

$$=t^2-4\int\frac{t}{t+1}\mathrm{d}t=t^2-4\int\frac{t+1-1}{t+1}\mathrm{d}t$$

$$=t^2-4\int(1-\frac{1}{t+1})\mathrm{d}t=t^2-4t+4\ln(t+1)+C_1 \qquad （2 分）$$

$$=x+1-4\sqrt{x+1}+4\ln(\sqrt{x+1}+1)+C_1$$

$$=x-4\sqrt{x+1}+4\ln(\sqrt{x+1}+1)+C\,. \qquad （2 分）$$

2. **【解】** 令 $x=2\sin t$， 则 $dx=2\cos t dt$． （1 分）

当 $x=0$ 时，$t=0$；当 $x=\sqrt{2}$ 时，$t=\frac{\pi}{4}$． （1 分）

$$原式=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{(2\sin t)^2}{\sqrt{[4-(2\sin t)^2]^3}}2\cos t dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}dt \qquad （3 分）$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 t\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sec^2 t-1)dt \qquad （2 分）$$

$$=[\tan t-t]_0^{\frac{\pi}{4}}=1-\frac{\pi}{4}\,. \qquad （1 分）$$

3. **【解】** $I_n=\int_0^{+\infty}x^n\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x=-x^n\mathrm{e}^{-x}\Big|_0^{+\infty}+n\int_0^{+\infty}x^{n-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ （3 分）

$$=\lim_{x\to+\infty}x^n\mathrm{e}^{-x}+nI_{n-1}=nI_{n-1} \qquad （1 分）$$

于是有 $I_n=nI_{n-1}=n(n-1)I_{n-2}=\cdots=n(n-1)\cdots 1I_0=n!I_0$． 又 （2 分）

$$I_0=\int_0^{+\infty}e^{-x}dx=-e^{-x}\Big|_0^{+\infty}=1, \qquad （1 分）$$

故有 $$I_n=n!. \qquad （1 分）$$

三、【解】

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1+\frac{1}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\frac{2+t^2}{2t}\,. \qquad \text{（6 分）}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{\frac{4t^2-2(2+t^2)}{4t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} \qquad \text{（4 分）}$$

$$=\frac{(t^2-2)(1+t^2)}{4t^3}\,. \qquad \text{（2 分）}$$

四、【证】 令

$$F(x)=\mathrm{e}^{-\lambda x}f(x)\,. \qquad \text{（4 分）}$$

则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且有 $F(a)=F(b)=0$，由 Rolle 中值定理知，至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使 $F'(\xi)=0$，即 （4 分）

$$\mathrm{e}^{-\lambda\xi}f'(\xi)-\lambda\mathrm{e}^{-\lambda\xi}f(\xi)=0\,, \qquad \text{（2 分）}$$

亦即

$$f'(\xi)=\lambda f(\xi)\,. \qquad \text{（2 分）}$$

五、【证】 因为

$$\frac{\partial u}{\partial s}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}=\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial u}{\partial y}\,, \qquad \text{（3 分）}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y}\,, \qquad \text{（3 分）}$$

所以

$$\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

$$=\left[\frac{1}{4}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{3}{4}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]+\left[\frac{3}{4}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2-\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{4}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] \qquad \text{（3 分）}$$

$$=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\,, \qquad \text{（3 分）}$$

即有

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\,. \qquad \text{（1 分）}$$

六、【证】 设$u_n=(-1)\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$， 则有

$$|u_n|=\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}\ge\frac{1}{2\sqrt{n+1}},$$ （3 分）

而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\sqrt{n+1}}=\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$是发散的,

由比较判别法知级数$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$是发散的. （3 分）

又因为$\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}\ge\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}}$，且有$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=0$， （3 分）

故由莱布尼兹判别法知交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$收敛,

从而级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$条件收敛. （3 分）

七、【解】 设$u_n=\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$， 由于

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\cdot\frac{2n-1}{x^{2n-1}}\right|=|x^2|,$$ （3 分）

故幂级数的收敛区间为$(-1,1)$. 当$x=-1$时， 级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{2n-1}$， 发散; 当$x=1$时,

级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$， 也发散，故级数的收敛域为$(-1,1)$. （3 分）

令 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ $(-1<x<1)$， 则有

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n-2}=\sum_{n=1}^{\infty}x^{2(n-1)}=\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(x^2)^n=\frac{1}{1-x^2}\quad(-1<x<1).$$ （3 分）

于是

$$f(x)=\int_0^x f'(x)dx=\int_0^x \frac{1}{1-x^2}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^x (\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x})dx=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| \quad (-1<x<1). \qquad （4 分）$$

八、【解】 用投影法（先单后重），积分区域为

$$\Omega:\begin{cases}0\le z\le y,\\(x,y)\in D_{xy}: x^2\le y\le 1, -1\le x\le 1.\end{cases} \qquad （4 分）$$

于是，有

$$\iiint_{\Omega} x^2 z dxdydz=\iint_{D_{xy}} dxdy\int_0^y x^2 zdz \qquad （2 分）$$

$$=\int_{-1}^1 x^2dx\int_{x^2}^1 dy\int_0^y zdz=\int_{-1}^1 x^2dx\int_{x^2}^1\left[\frac{z^2}{2}\right]_0^y dy \qquad （2 分）$$

$$=\int_{-1}^1 x^2dx\int_{x^2}^1 \frac{y^2}{2}dy=\int_{-1}^1 x^2\left[\frac{y^3}{6}\right]_{x^2}^1 dx \qquad （2 分）$$

$$=\frac{1}{6}\int_{-1}^1 (x^2-x^8)dx=\frac{1}{3}\int_0^1 (x^2-x^8)dx=\frac{2}{27}. \qquad （3 分）$$

九、【解】 令 $P=\dfrac{y}{x^2+y^2}$， $Q=\dfrac{-x}{x^2+y^2}$， 则 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，

故积分与路径无关. （4 分）

选取如下积分路径，可得

$$\int_L \frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}=\int_{L_1+L_2}\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2} \qquad （2 分）$$

$$=\int_{L_1}\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}+\int_{L_2}\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}=0+\int_0^2\frac{2dx}{x^2+2^2} \qquad （4 分）$$

$$=\arctan\frac{x}{2}\Big|_0^2=\frac{\pi}{4}. \qquad （2 分）$$

十、【解】 设 $P=z^2-x$，$Q=x^2-y$，$R=y^2-z$，曲面 Σ 所围区域为 Ω， 由

高斯公式可得

$$\oiint_{\Sigma}(z^2-x)dydz+(x^2-y)dzdx+(y^2-z)dxdy \qquad （5 分）$$

$$=\iiint_{\Omega}(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})dv=\iiint_{\Omega}(-1-1-1)dv \qquad （5 分）$$

$$= -3\iiint_{\Omega} 1 dv = -3\left(\frac{1}{3}\pi \cdot 2^2 \cdot 2 - \frac{1}{3}\pi \cdot 1^2 \cdot 1\right)$$

$$= -7\pi \, .$$ （5 分）