姓名：________ 报考专业：________ 准考证号码：________

密封线内不要写题

机密★启封前

湖北汽车工业学院

2023年攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目名称：数学分析　　　　（■A卷□B卷）科目代码：601

考试时间：3小时　　满分150分

注意：本试题共10大题，共2页；所有答题内容必须写在答题纸上，写在试题或草稿纸上的一律无效；考完后试题和答题纸一同装入试卷袋密封交回。

一、求下列极限（共3小题，每小题8分，共24分）

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{x}$；

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\mathrm{e}^{x^2}-1)\left[\ln(1+x)-x\right]}{x\arctan x(\cos x-1)}$；

3. 设$a_1,a_2,\cdots,a_n$为n个正数，定义函数

$$f(x)=\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}},$$

求$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$的值.

二、求下列积分（共3小题，每小题8分，共24分）

1. $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{2+\sin^2 x}$；

2. $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$；

3. $\displaystyle\int_0^2\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{|1-x|}}$.

三、（12分）$y=y(x)$是由参数方程$\begin{cases}x=t^2+2t\\ y=\ln(t+1)\end{cases}$所确定的函数，求一阶导数$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$和二阶导数$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

四、（12分）f在$[a,b]$上始终有二阶导数，且$f(a)=f(b)=0$，并且存在一点$c\in(a,b)$使得$f(c)>0$．证明，至少存在一个$\xi\in(a,b)$使得$f''(\xi)<0$.

五、（13 分） 函数$z=z(x,y)$满足$(x+y)\dfrac{\partial z}{\partial x}=(x-y)\dfrac{\partial z}{\partial y}$，另有变量$u$，$v$满足

$\begin{cases} e^{u}=\sqrt{x^{2}+y^{2}} \\ \tan v=\dfrac{y}{x} \end{cases}$，求证：$\dfrac{\partial z}{\partial u}=\dfrac{\partial z}{\partial v}$.

六、（12 分） 判断级数$\sum\dfrac{(-1)^{n}}{n}\dfrac{x^{n}}{1+x^{n}}(x>0)$ 是否收敛.

七、（13 分） 求证：幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{4n}}{(4n)!}$在$(-\infty,+\infty)$上收敛，且它的和函数

$y(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{4n}}{(4n)!}$满足$y^{(4)}=y$.

八、（13 分） 计算三重积分$\iiint_{V}x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$，其中$V$是三个坐标平面以及平面

$x+2y+z=1$所围成的区域.

九、（12 分） 验证$e^{x}[e^{y}(x-y+2)+y]\mathrm{d}x+e^{x}[e^{y}(x-y)+1]\mathrm{d}y$为某函数的全微分，并求该函数.

十、（15 分） 计算第二型曲面积分 $\iint_{S}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中$S$是上半

球面$z=\sqrt{a^{2}-x^{2}-y^{2}}$的外侧.