机密★启封前

# 湖北汽车工业学院

## 2023年攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目名称：高等代数　　　　（□A卷☑B卷）科目代码：813

考试时间：3小时　　满分150分

姓名：________ 报考专业：________ 准考证号码：________

密封线内不要写题

注意：本试题共2大题，共2页；所有答题内容必须写在答题纸上，写在试题或草稿纸上的一律无效；考完后试题和答题纸一同装入试卷袋密封交回。

**一、计算题（共7小题，共95分）**

1.（10分）在$Q[x]$中，$f(x)=x^5-5x^4+7x^3-2x^2+4x-8$.

（1）判断该多项式有无重因式；

（2）如果有重因式，求一个没有重因式的多项式$g(x)$，使它与$f(x)$有相同的不可约因式.

2.（10分）设矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix},$$

又三阶矩阵$B$满足$AB+4E=A^2-2B$，求矩阵$B$.

3.（15分）计算$n$阶行列式$D_n=\begin{vmatrix}x_1-m & x_2 & \cdots & x_n\\ x_1 & x_2-m & \cdots & x_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n-m\end{vmatrix}$.

4.（15分）求解含参数$a$的线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+ax_3=-2,\\ x_1+ax_2+x_3=-2,\\ ax_1+x_2+x_3=a-3.\end{cases}$$

5.（20分）已知二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+2x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3,$$

(1) 写出此二次型$f$对应的矩阵；

(2) 试求正交变换$x=Py$，将此二次型$f$化为标准形.

6.（15 分）已知四阶方阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，其中 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，且 $\alpha_1=3\alpha_2+\alpha_3$，若 $\beta=\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_4$，求线性方程组 $Ax=\beta$ 的通解.

7.（10 分）设向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\-1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}3\\2\\1\\-1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\3\\\lambda\\1\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}5\\5\\2\\0\end{pmatrix}$,

（1）当 $\lambda$ 取何值时，该向量组的秩为 $3$？

（2）当 $\lambda$ 取上述值时，求出该向量组的一个极大线性无关组，并将其余向量用该极大线性无关组线性表示.

**二、证明题（共 5 小题，共 55 分）**

1.（10 分）设 $A, B$ 为 $n$ 阶方阵，且满足 $A^2=A$，$B^2=B$ 及 $(A-B)^2=A+B$. 证明：$AB=BA=0$ .

2.（10 分）证明：如果 $A^k=O$，那么 $(E-A)^{-1}=E+A+A^2+\cdots+A^{k-1}$ .

3.（10 分）已知矩阵 $A$ 是 $n$ 阶实反对称矩阵，证明：$E-A^2$ 是正定矩阵.

4.（10 分）证明：每一个 $n$ 维线性空间都可以表示成 $n$ 个一维子空间的直和.

5.（15 分）（1）设 $\lambda_1,\lambda_2$ 是线性变换 $\mathcal{A}$ 的两个不同特征值，$\varepsilon_1,\varepsilon_2$ 是分别属于 $\lambda_1,\lambda_2$ 的特征向量，证明：$\varepsilon_1+\varepsilon_2$ 不是 $\mathcal{A}$ 的特征向量.

（2）证明：如果线性空间 $V$ 的线性变换 $\mathcal{A}$ 以 $V$ 中每个非零向量作为它的特征向量，那么 $\mathcal{A}$ 是数乘变换.